Chapitre 25

Espaces vectoriels

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
De plus, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (cf définition ci-dessous).

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et structure

Définition 25.1 (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble muni d'une l.c.i. $+$ et d'une loi (de composition) externe notée

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel si :

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. Pour tous $u, v \in E$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :

EV1. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ (distributivité des vecteurs sur les scalaires)

EV2. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ (distributivité des scalaires sur les vecteurs)

EV3. $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$ (pseudo-associativité avec les lois $\times$ et $\cdot$)

EV4. $1 \cdot u = u$

Les éléments de E sont appelés vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

On omet souvent de préciser les lois $+$ et $\cdot$, voire même le corps $\mathbb{K}$: on pourra ainsi écrire "Soit E un espace vectoriel". En abrégé, cela donne "Soit E un $\mathbb{K}$-e.v." ou encore "Soit E un e.v.".

Remarque. Un espace vectoriel E n'est jamais vide car, en tant que groupe pour $+$, il contient un élément neutre qu'on note en général 0_E et qu'on appelle le vecteur nul.

Propriété 25.2 (Calcul avec $0_{\mathbb{K}}, 0_E$ dans un e.v.)

Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
- $\lambda \cdot u = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad u = 0_E$

Démonstration.

- Par EV1, on a

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \end{aligned}$$

  et donc en ajoutant $-0_{\mathbb{K}} \cdot u$ des deux côtés, on trouve $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot u$.
- On montre le second point de la même manière en calculant $\lambda \cdot (0_E + 0_E)$ et avec EV2.
- Enfin, si $\lambda \cdot u = 0_E$, supposons par l'absurde que $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $u \neq 0_E$. Alors λ admet un inverse λ^{-1}, et par EV3 et EV4,

$$u = 1_{\mathbb{K}} \cdot u = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot u = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot u) = \lambda^{-1} \cdot 0_E = 0_E$$

  où la dernière égalité est justifiée par le second point. Ainsi, $0_E \neq u = 0_E$. Contradiction. D'où le résultat.

□

Propriété 25.3 (Calcul avec "$-$" dans un e.v.)

Soit $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

- $(-\alpha) \cdot u = \alpha \cdot (-u) = -(\alpha \cdot u)$ et en particulier $(-1_{\mathbb{K}}) \cdot u = -u$
- $(\alpha - \beta) \cdot u = \alpha \cdot u - \beta \cdot u$
- $\alpha \cdot (u - v) = \alpha \cdot u - \alpha \cdot v$

Il arrive qu'on note 0 pour signifier à la fois le vecteur nul 0_E et le scalaire nul $0_{\mathbb{K}}$ (le contexte permettant souvent de lever toute ambiguité).
Par ailleurs, on omettra dorénavant d'écrire la loi $\cdot$ et on notera seulement λu au lieu de $\lambda \cdot u$.

1.2 Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

On pourra utiliser *sans démonstration* que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels. Par souci de concision, on n'introduira pas toutes les variables utilisées, le contexte et la notation permettant de s'y retrouver.

- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois usuelles :
$$(u_n) + (v_n) := (u_n + v_n)$$
$$\lambda \cdot (u_n) := (\lambda u_n)$$
- $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois usuelles :
$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$$
- Soit I un intervalle non vide et non singleton. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois usuelles :
$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$$
- Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois usuelles :
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$
$$\lambda A := (\lambda a_{ij})$$
- $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois usuelles :
$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) X^k$$
$$\lambda \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) := \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$$
- $\mathbb{K}(X)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois usuelles :
$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} := \frac{AD + BC}{BD}$$
$$\lambda \frac{A}{B} := \frac{\lambda A}{B}$$

- Le corps $\mathbb{K}$ lui-même est un $\mathbb{K}$-e.v. : la loi $+$ est celle du corps $\mathbb{K}$, et la loi $\bullet$ correspond à la l.c.i. $\times$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in \mathbb{K} \qquad \lambda \bullet x := \lambda \times x = \lambda x$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois suivantes :

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda (x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

- Si E est un $\mathbb{C}$-e.v., alors E est un $\mathbb{R}$-e.v. En effet, si les propriétés **EV1.** à **EV4.** sont vérifiées pour tous les scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ alors elles le sont en particulier pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1.3 Autres espaces vectoriels

Rappel : soit $n \geq 2$ un entier. Étant donnés n ensembles $A_1, \ldots, A_n$, on note

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}$$

Propriété 25.4 (Espace produit)

Soit $n \geq 2$ un entier, $E_1, \cdots, E_n$ des $\mathbb{K}$-e.v. Alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois suivantes :

$$(u_1, \cdots, u_n) + (v_1, \cdots, v_n) := (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n)$$

$$\lambda (u_1, \cdots, u_n) := (\lambda u_1, \cdots, \lambda u_n)$$

Il y a un abus de notation dans la définition ci-dessus : on a noté $+$ et $\bullet$ pour désigner aussi bien les lois de E_1, de E_2, $(\cdots)$, de E_n et de $E_1 \times \ldots \times E_n$. C'est une pratique quasi systématique avec les e.v. : on déduit de quelle loi il s'agit en fonction du contexte [1].

Remarque. En particulier, $E^n := \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition 25.5 (Espace $\mathbb{K}^\Omega$)

Pour tout ensemble Ω, $\mathbb{K}^\Omega$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois suivantes :

$$f + g : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{array} \qquad \lambda f : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda f(x) \end{array}$$

On notera que Ω est un ensemble quelconque, il n'est pas forcément muni de l.c.i. $+$ et $\bullet$. Ainsi, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \Omega$ alors $x + y$ ou $\lambda \bullet x$ n'ont pas de sens a priori. Pour autant, les fonctions $f + g$ et λf sont bien définies car les $+$ et $\bullet$ de leur définition s'appliquent à des éléments de l'ensemble d'arrivée, càd $\mathbb{K}$.

Exemple 1. En particulier, les ensembles $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ et $\mathbb{K}^\mathbb{K}$ sont des $\mathbb{K}$-e.v.

Exemple 2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, l'ensemble des applications $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ forme un $\mathbb{K}$-e.v. : c'est l'ensemble $\mathbb{K}^{[a,b]}$.

1. C'est déjà ce qu'on a fait jusqu'à présent : pour la somme $A + B$, la loi $+$ n'a pas le même sens si A, B sont des matrices, ou des polynômes, ou des entiers, etc.

1.4 Combinaison linéaire

Définition 25.6 (Combinaison linéaire (cas fini))

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \cdots, u_n \in E$ une famille de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $u \in E$ est une combinaison linéaire de $(u_1, \cdots, u_n)$ si

$$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$$

Exemple 3. Le vecteur $(3, -2, -5) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $(1, 1, 0)$ et de $(0, 1, 1)$ car

$$(3, -2, -5) = \qquad (1, 1, 0) + \qquad (0, 1, 1)$$

Exemple 4. Les ~~“vecteurs”~~ fonctions ch, sh $\in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ s'écrivent comme une combinaison linéaire des ~~“vecteurs”~~ fonctions $x \mapsto e^x$ et de $x \mapsto e^{-x}$ car

$$\mathrm{ch} x = \qquad e^x + \qquad e^{-x}$$

$$\mathrm{sh} x = \qquad e^x + \qquad e^{-x}$$

Exemple 5. Tout polynôme de degré 2

$$P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$$

peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $1, X, X^2$:

$$P = \qquad X^2 + \qquad X + \qquad 1$$

Remarque. On peut étendre la Définition 25.6 au cas $n = 0$: on pose alors par convention $\sum_{i=1}^{0} (\cdots) = 0_E$. Autrement dit, une combinaison linéaire de $n = 0$ vecteur donne le vecteur nul 0_E.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition-caractérisation et exemples

On rappelle que E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition 25.7 (S.e.v.)

On appelle sous-espace vectoriel de E tout ensemble $F \subset E$ qui soit stable par $+$ et $\cdot$, càd :

$$\forall u, v \in F \qquad u + v \in F \qquad \text{et} \qquad \forall (\lambda, u) \in \mathbb{K} \times F \qquad \lambda \cdot u \in F$$

et tel que, muni des lois induites $+' : F \to F$ et $\cdot' : F \to F$, l'ensemble $(F, +', \cdot')$ est encore un e.v.

On utilisera souvent l'abréviation “F est un s.e.v. de E”. En particulier, F admet un élément neutre pour l'addition, 0_F, qui (par unicité de l'élément neutre) vérifie $0_F = 0_E$. On évitera cependant d'écrire 0_F avant d'avoir justifié que F est un s.e.v.

Propriété 25.8 (Caractérisation d'un s.e.v. en 3 coups)

Soit $F \subset E$. Alors F est s.e.v. si et seulement si

1. $0_E \in F$
2. F est stable par la loi $+$: $\quad \forall u, v \in \boxed{F} \qquad u + v \in F$
3. F est stable par la loi $\bullet$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall u \in \boxed{F} \qquad \lambda u \in F$

Cette caractérisation est notoirement utile pour montrer qu'un ensemble *n'est pas un s.e.v.* : il suffit de vérifier qu'une des 3 assertions ci-dessus n'est pas vérifiée. En revanche, pour montrer qu'un ensemble *est bien un s.e.v.*, il est en général plus rapide d'utiliser la caractérisation suivante :

Propriété 25.9 (Caractérisation d'un s.e.v. en 2 coups)

Soit $F \subset E$. Alors F est s.e.v. si et seulement si

1. $0_E \in F$
2. F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \qquad \forall u, v \in \boxed{F} \qquad \alpha u + \beta v \in F$$

Remarque. L'assertion 2 signifie bien que F est stable par combinaison linéaire : on a en effet

$$\begin{array}{lllll} & & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} & \forall u, v \in F & \alpha u + \beta v \in F \\ \iff & \forall n \geq 2 & \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n & \forall (u_1, \ldots, u_n) \in F^n & \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \in F \end{array}$$

Remarque. Comme pour les groupes, dans les caractérisation ci-dessus, on peut remplacer l'assertion "$0_E \in F$" par "$F \neq \varnothing$". Par exemple pour la seconde caractérisation, on a en réalité :

$$\begin{cases} 0_E \in F \\ F \text{ stable par combinaison linéaire} \end{cases} \iff \begin{cases} F \neq \varnothing \\ F \text{ stable par combinaison linéaire} \end{cases}$$

Mais en général, la méthode la plus rapide de montrer que $F \neq \varnothing$ est de montrer que $0_E \in F$ (ce qui est par ailleurs toujours vrai pour un s.e.v.).

Exemple 6. $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v. de E, appelés <u>sous-espaces triviaux</u>.

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$.

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il suffit bien souvent de montrer qu'il s'agit d'un s.e.v. d'un e.v. plus gros (typiquement ceux de la section 1.2).

Exemple 8. Montrer que l'ensemble $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

Exemple 9. Montrer que $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

2.2 S.e.v. engendrés (par une partie X)

Propriété 25.10 (Intersection)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_n$ des s.e.v. de E. Alors $F_1 \cap \dots \cap F_n$ est aussi un s.e.v. de E.
Plus généralement, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de s.e.v. de E, alors $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est aussi un s.e.v. de E.

Démonstration. On ne prouve que la deuxième assertion, à savoir que $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un s.e.v. de E.

□

Exemple 10. $C^\infty(I,\mathbb{K})$ est un s.e.v. de $C^0(I,\mathbb{K})$, ou de $\mathbb{K}^I$: en effet $C^\infty(I,\mathbb{K}) = \dots$

Définition 25.11 (S.e.v. engendré par une partie)

Soit X une partie quelconque de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par X l'intersection de tous les s.e.v. F de E qui contiennent X. C'est un s.e.v. de E qu'on note $\mathrm{Vect}(X)$.

Dit autrement, si on note $(F_i)_{i\in I}$ la famille de tous les s.e.v. de E qui vérifient $X \subset F_i$, alors

$$\mathrm{Vect}(X) := \bigcap_{i\in I} F_i$$

Attention : X est une partie quelconque de E, pas forcément un s.e.v. Par contre, $\mathrm{Vect}(X)$ est un s.e.v. de E par définition.

Propriété 25.12

$\mathrm{Vect}(X)$ est le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v. de E qui contient X.
Dit autrement, pour tout **s.e.v.** G, on a $X \subset G \implies \mathrm{Vect}(X) \subset G$.

Exemple. $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$: en effet $\{0_E\}$ est un s.e.v. qui contient (forcément) $\varnothing$, et c'est le plus petit, car pour tout autre s.e.v. G (qui contient forcément $\varnothing$), on a $\{0_E\} \subset G$.

Remarque. D'un point de vue pratique, la caractérisation suivante est essentielle pour se représenter $\mathrm{Vect}(X)$

Propriété 25.13 (Caractérisation de Vect(X))

$\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X :

$$\mathrm{Vect}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad (u_1,\cdots,u_n) \in X^n \right\}$$

Rappel : si $n = 0$ dans la somme ci-dessus, alors $\sum_{i=1}^{0}(\cdots) := 0_E$. Cela permet d'assurer que $\mathrm{Vect}(\varnothing) = 0_E$.

Exemple 11. On munit $\mathbb{C}$ de sa structure de $\mathbb{R}$-e.v.

- Si $X = \{1\}$, alors $\text{Vect}(X) = \{\lambda\, 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$; en particulier $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de $\mathbb{C}$ (vu comme un $\mathbb{R}$-e.v.).
- Si $X = \{i\}$, alors $\text{Vect}(X) = \{\lambda i \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = i\mathbb{R}$; en particulier $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de $\mathbb{C}$ (vu comme un $\mathbb{R}$-e.v.).
- Si $X = \{1, i\}$, alors $\text{Vect}(X) = \{\lambda_1 1 + \lambda_2 i \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$.

Exemple 12. On munit $\mathbb{C}$ de sa structure de $\mathbb{C}$-e.v.

- Si $X = \{1\}$, alors
- Si $X = \{i\}$, alors
- Si $X = \{0\}$, alors

Propriété 25.14

Soit A, B deux parties de E. Si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

2.3 S.e.v. engendrés (par une famille finie)

Définition 25.15 (S.e.v. engendré par des vecteurs)

Soit $n \geq 1$ et $u_1, \cdots, u_n \in E$. On note

$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \,\middle|\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\} \qquad = \text{Vect}\left(\{u_1, \cdots, u_n\}\right)$$

et on l'appelle le <u>sous-espace engendré par la famille $(u_1, \cdots, u_n)$</u>.

Exemple 13. Dans l'e.v. $\mathbb{K}[X]$, on a

$$\text{Vect}(1, X, \ldots, X^n) =$$

Exemple 14. Dans l'e.v. $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\right\} &= \{(x, y, 0) \mid x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,0) + y(0,1,0)\} \\ &= \text{Vect}\left[(1,0,0)\,,\,(0,1,0)\right]\end{aligned}$$

Exemple 15. Pour tout vecteur $u \in E$, on note

$$\mathbb{K}u := \text{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Si $u \neq \{0_E\}$, on dit que $\mathbb{K}u$ est une <u>droite vectorielle</u>. Si $u = 0_E$, alors $\mathbb{K}u = \{0_E\}$ n'est pas une droite vectorielle.

Exemple 16. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\text{Vect}(I_n) = \mathbb{K}I_n = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Cela correspond à l'ensemble des matrices scalaires, qui est donc un s.e.v.

Exemple 17. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{0} \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{0} \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\} = D_n(\mathbb{K})$$

En particulier, $D_n(\mathbb{K})$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3 Familles génératrices, familles libres, bases

3.1 Familles génératrices (finies)

Propriété 25.16 (Famille génératrice (cas fini))

Soit $(g_1, \ldots, g_n)$ une famille de vecteurs de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- $\text{Vect}(g_1, \cdots, g_n) = E$
- **Tout** vecteur $u \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $(g_1, \cdots, g_n)$:

$$\forall u \in E \quad \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \tag{G}$$

Lorsque c'est le cas, on dit que $(g_1, \cdots, g_n)$ est une famille génératrice (de E) ou encore que la famille $(g_1, \cdots, g_n)$ engendre E.

Exemple 18. Dans l'e.v. $\mathbb{K}^n$, la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ définie par

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0) \qquad e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0) \qquad \ldots \qquad e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$$

est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. En effet, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\begin{aligned} x &= x_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 0, 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{aligned}$$

Exemple 19. Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$, la famille $(1, i)$ est génératrice, car pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $z = \lambda\, 1 + \mu\, i$: il suffit de prendre $\lambda = \mathrm{Re}(z)$ et $\mu = \mathrm{Im}(z)$.

Exemple 20. Dans l'e.v. $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(1, X, \cdots, X^n)$ est génératrice par l'exemple 13.

Remarque. Attention, pour être une famille génératrice de E, il faut que tous les vecteurs de la famille soient des éléments de E. Ainsi, la famille $(1, X, \cdots, X^{n+1})$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ car $X^{n+1} \notin \mathbb{K}_n[X]$.

3.2 Familles libres (finies)

Définition 25.17 (Famille libre (cas fini))

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une famille $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ est une famille libre si

$$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \quad \Longrightarrow \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (0, \cdots, 0) \right)$$

Si la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ n'est pas libre, on dit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille liée. Cela signifie que

$$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \quad \text{et} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \right)$$

ou encore

$$\exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$$

Si la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre, on dit également que les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont linéairement indépendants. Si la famille est liée, on dira que les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont linéairement dépendants.

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre, il faut se donner une combinaison linéaire quelconque des $u_1, \cdots, u_n$, avec des inconnues $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, puis, en *supposant que cette CL est nulle*, càd $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$, il faut montrer que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Exemple 21. Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$, si on pose $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$, alors la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est liée, il suffit de trouver n scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *non tous nuls* tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$.

Exemple 22. Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, si on pose $u_1 : x \mapsto 1$, $u_2 : x \mapsto \cos(2x)$ et $u_3 : x \mapsto \sin^2 x$, alors la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. En effet,

Exemple 23. Si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-e.v. alors la famille $(1, i)$ est libre : pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 i = 0 \quad (= 0_{\mathbb{C}}) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Exemple 24. Si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-e.v. alors la famille $(1, i)$ est liée : en effet (si on pose $\lambda_1 = i \in \mathbb{C}$ et $\lambda_2 = -1 \in \mathbb{C}$)

$$(\lambda_1 1 + \lambda_2 i =) \qquad i 1 + (-1) i = 0 \quad (= 0_{\mathbb{C}})$$

Remarque.

- Si une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ contient un vecteur nul $u_j = 0$, alors la famille est liée :

$$0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_{j-1} + 1 \underbrace{u_j}_{=0} + 0u_{j+1} + \cdots + 0u_n = 0_E$$

  On a bien $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ avec une famille de n scalaires non tous nuls :

$$\lambda_i = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- Une famille à un vecteur, (u), est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.

3.3 Caractérisations d'une famille liée

Définition 25.18 (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits colinéaires si

$$\exists \alpha \in \mathbb{K} \qquad (u = \alpha v \qquad \text{ou} \qquad v = \alpha u)$$

Attention,

$$(\exists \alpha \in \mathbb{K} \qquad u = \alpha v) \qquad \not\Longrightarrow \qquad (\exists \beta \in \mathbb{K} \qquad v = \beta u)$$

Plus précisément, si $u = \alpha v$ avec $\alpha \neq 0$, alors on peut déduire que $v = \frac{1}{\alpha} u = \beta u$ avec $\beta := \frac{1}{\alpha}$.
Cependant si $\alpha = 0$, ce n'est pas toujours possible. Par exemple avec $u = (0,0)$ et $v = (1,1)$, on a $u = 0v$ mais on ne peut pas avoir $v = \beta u$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.

Propriété 25.19 (Caractérisation d'une famille lié (pour 2 vecteurs))

Soit $u, v \in E$. La famille (u, v) est liée si et seulement si u, v sont colinéaires.

Démonstration.

$\square$

Exemple 25. On considère

$$u = (1, 2, -1) \qquad v = (3, 6, -3)$$

On a $v = 3u$ (ou $u = \frac{1}{3} v$) donc u, v sont colinéaires : la famille (u, v) est liée.

Exemple 26. On considère

$$u = (1, 2, -1) \qquad w = (-2, -4, 0)$$

On remarque que u, w ne sont pas colinéaires, donc (u, w) est libre.

On peut généraliser la Propriété 25.19 à n vecteurs de cette façon :

Propriété 25.20 (Caractérisation d'une famille liée (n vecteurs))

Soit $n \geq 2$. La famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est liée si et seulement si on peut exprimer un vecteur de la famille comme une combinaison linéaire des autres. Autrement dit,

$$\begin{aligned}(u_1, \cdots, u_n) \text{ est liée} \quad &\text{ssi} \quad \exists j \in [\![1, n]\!] \qquad u_j \in \operatorname{Vect}(u_1, \cdots, u_{j-1}, u_{j+1}, \cdots, u_n) \\ &\text{ssi} \quad \exists j \in [\![1, n]\!] \qquad \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-1} \quad u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i u_i\end{aligned}$$

Démonstration. Similaire à la Propriété 25.19 : par exemple si

$$u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i u_i$$

alors

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{j-1} u_{j-1} + (-1) u_j + \lambda_{j+1} u_j + \ldots + \lambda_n u_n = 0$$

avec une famille de n scalaires $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{j-1}, -1, \lambda_{j+1}, \cdots, \lambda_n)$ non tous nuls car le j-ième élément n'est pas nul. □

Exemple 27. On considère

$$u = (1, 0) \qquad v = (0, 1) \qquad w = (1, 2)$$

Alors la famille (u, v, w) est liée car $w = 1\,u + 2\,v$.
Pourtant, on notera que ses vecteurs ne sont pas deux à deux colinéaires : les familles (u, v), (v, w) et (w, u) sont toutes libres.

Remarque. Si une famille comporte deux vecteurs identiques, elle est liée. En effet, si on considère une famille $(u, u, u_3, \cdots, u_n)$, alors le premier vecteur u peut s'exprimer comme une combinaison linéaires des vecteurs suivants $u, u_3, \cdots, u_n$:

$$u = 1\,u + 0 u_3 + \ldots + 0 u_n$$

3.4 Propriétés des familles libres et génératrices

Remarque. Le caractère libre, lié ou générateur d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs de la famille.

Définition 25.21

Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs, on dit que :

1. $\mathcal{G}$ est une <u>sur-famille</u> de $\mathcal{F}$ si on obtient $\mathcal{G}$ à partir de $\mathcal{F}$ en lui ajoutant zéro, un ou plusieurs vecteurs.
2. $\mathcal{E}$ est une <u>sous-famille</u> de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ est une sur-famille de $\mathcal{E}$.

Exemple 28. Dans $\mathbb{C}$, la famille $\mathcal{G} = (1, i, j)$ est une sur-famille de $(1, i)$ et de (i, j), mais ce n'est pas une sur-famille de $(1, 2i)$.
Les sous-familles de $\mathcal{F} = (1, i)$ sont $(1, i)$, (1), (i) et la famille vide.

Théorème 25.22

1. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
2. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
3. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Démonstration. On considère la première assertion. Soit $(g_1, \cdots, g_n)$ une famille génératrice et $v \in E$. On va se contenter de montrer que $(g_1, \cdots, g_n, v)$ est génératrice.
Soit $u \in E$. Montrons que $u \in \text{Vect}(g_1, \cdots, g_n, v)$. Comme $(g_1, \cdots, g_n)$ est génératrice, on a $u \in \text{Vect}(g_1, \cdots, g_n)$, donc

$$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i + 0v$$

donc $u \in \text{Vect}(g_1, \cdots, g_n, v)$. Par arbitraire sur u, la famille $(g_1, \cdots, g_n, v)$ est génératrice.

$\square$

3.5 Bases (cas fini)

Définition 25.23 (Non officiel : décomposition selon une famille)

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $u \in E$ est décomposable selon $(u_1, \cdots, u_n)$ si $u \in \text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$, càd si

$$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Toute famille $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ qui vérifie cela est appelée **une** décomposition de u selon $(u_1, \cdots, u_n)$.

Exemple 29. Si $u = (1,0)$, $v = (0,1)$ et $w = (1,1)$, alors le vecteur $u = (-2,3)$ est décomposable selon (u, v, w) :

$$u = (-2,3) = \qquad (1,0) + \qquad (0,1) + \qquad (1,1)$$

$$u = (-2,3) = \qquad (1,0) + \qquad (0,1) + \qquad (1,1)$$

On voit que u admet plusieurs décompositions différentes : il n'y a pas forcément unicité de la décomposition.

Exemple 30. Si $u = (1,0,0)$ et $v = (0,1,0)$, alors le vecteur $u = (0,0,3)$ n'est pas décomposable selon (u, v) : si c'était le cas, on en déduirait facilement une contradiction.

Lemme 25.24 (Unicité de la décomposition pour une famille libre)

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille **libre**. Alors pour tous scalaires $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(\beta_i)_{1\leq i\leq n}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \alpha_i = \beta_i$$

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\, u_i = 0_E \\
&\Longrightarrow \quad (\alpha_1 - \beta_1, \cdots, \alpha_n - \beta_n) = (0, \cdots, 0) \qquad \text{car } (u_1, \cdots, u_n) \text{ est libre} \\
&\Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \alpha_i = \beta_i
\end{aligned}$$

□

Définition 25.25 (Base)

On dit que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base (de E) si $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre ET génératrice.

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de E.

$(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice $\Longleftrightarrow$ Tout vecteur $u \in E$ est décomposable selon $(e_1, \cdots, e_n)$

$(e_1, \cdots, e_n)$ est libre $\Longleftrightarrow$ $\forall u \in E$, **SI** u est décomposable selon $(e_1, \cdots, e_n)$, **ALORS** la décomposition est unique

$(e_1, \cdots, e_n)$ est une base $\Longleftrightarrow$ Tout vecteur $u \in E$ est décomposable selon $(e_1, \cdots, e_n)$ **ET** cette décomposition est unique

Dit autrement (avec les termes officiels) :

Théorème 25.26

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille dans E.

1. $(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice si pour tout $u \in E$,

$$\exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

2. $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre si, pour tout $u \in E$ tel que l'assertion ci-dessus soit vraie, le n-uplet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est **unique**.
3. $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base si pour tout $u \in E$,

$$\boxed{\exists\,!}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Si $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est (l'unique) n-uplet qui vérifie cette assertion, les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont appelés les coordonnées de u dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$.

Remarque. Attention ! Certains sujets notent x un *vecteur* de E, et notent $x_1, \cdots, x_n$ ses coordonnées dans une base donnée. Dans ce cas $x_1, \cdots, x_n$ jouent le rôle des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ du théorème ci-dessus.

Exemple 31 (très important !)**.** La famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, avec

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0) \qquad e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0) \qquad \ldots \qquad e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$$

est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

alors $u = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Autrement dit, les *scalaires* $x_1, \cdots, x_n$ sont les coordonnées de u dans la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$.

Exemple 32. La famille $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. En effet, on a vu au chapitre sur les polynômes que tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique comme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 X^0 + a_1 X^1 + \ldots + a_n X^n$$

Les scalaires $a_0, \cdots, a_n$ sont ainsi les coordonnées de P dans la base $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$.

4 Somme de s.e.v.

4.1 Définition et exemples

Rappel : étant donné deux parties F et G d'un ensemble E, on pose :

$$\begin{aligned} F + G &:= \{y + z \mid y \in F,\, z \in G\} \\ &= \{u \in E \mid \exists u_F \in F \quad \exists u_G \in G \qquad u = u_F + u_G\} \end{aligned}$$

Propriété 25.27

Soit F, G deux s.e.v. de E. Alors $F + G$ est un s.e.v. de E appelé somme de F et de G.

Dit autrement, $F + G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent se décomposer en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, et cet ensemble est un s.e.v.

Exemple 33. Si on voit $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-e.v., alors on a vu que $\begin{cases} \mathbb{R} = \text{Vect}(1) \\ i\mathbb{R} = \text{Vect}(i) \end{cases}$ donc $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont bien des s.e.v. et

$$\mathbb{R} + i\mathbb{R} = \mathbb{C}$$

(qui est bien un s.e.v. de $\mathbb{C}$).

Remarque. ATTENTION ! $F + G \neq F \cup G$. En général, $F \cup G$ n'est même pas un s.e.v.
En utilisant l'exemple ci-dessus, $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ n'est pas un s.e.v. : $1, i$ sont des éléments de $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ mais $1 + i \notin \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Donc $+$ n'est pas une l.c.i. sur $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

Exemple 34. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$F_1 := \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\} \qquad \text{et} \qquad F_2 := \{(x,y,z) \mid x=y=z\}$$

alors F_1, F_2 sont des s.e.v. et $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.

Propriété 25.28

Soit F, G deux s.e.v. de E. Le s.e.v. $F+G$ est le plus petit s.e.v. contenant F et G, càd $F+G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

Remarque. On montre facilement que

$$F+G = G+F \qquad F+\{0_E\} = F$$
$$F+F = F \qquad F+E = E$$

4.2 Somme directe de s.e.v.

Définition 25.29

Soit F, G deux s.e.v. Par définition,

$$\forall u \in F+G \qquad \exists (u_F, u_G) \in F \times G \qquad u = u_F + u_G$$

On dit que F, G sont en <u>somme directe</u> si, pour tout $u \in F+G$, la décomposition de u en $u_F + u_G$ est **unique**. Autrement dit, si

$$\forall u \in F+G \qquad \boxed{\exists !} (u_F, u_G) \in F \times G \qquad u = u_F + u_G$$

Lorsque F, G sont en somme directe, on note $F \oplus G$ leur somme au lieu de $F+G$.

Propriété 25.30

Soit F, G deux s.e.v. de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe.
2. $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration. Montrons 1 $\implies$ 2. Soit $u \in F \cap G$. Alors on peut écrire deux décompositions de u :

$$u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$$
$$u = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G}$$

Comme F, G sont en somme directe, la décomposition de u est unique. Ainsi $u = 0$. Ainsi $F \cap G \subset \{0\}$ et l'autre inclusion est évidente.

□

4.3 S.e.v. supplémentaires

Définition 25.31

Si $F \oplus G = E$, on dit que F, G sont des s.e.v. supplémentaires (de E).
On dit également que G est un supplémentaire de F.

Propriété 25.32

Soit F, G deux s.e.v. de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F \oplus G = E$
2. $F + G = E \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}$
3. Tout élément de E se décompose de manière unique en la somme d'un élément de F et d'un élément de G :
$$\forall u \in E \qquad \exists!(u_F, u_G) \in F \times G \qquad u = u_F + u_G$$

Exemple 35. Dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v.

$$F_1 := \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} \qquad \text{et} \qquad F_2 := \{(x, y, z) \mid x = y = z\}$$

sont supplémentaires : $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$.

Exemple 36. Dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-e.v., on a $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.

Remarque. Un s.e.v. F peut avoir plusieurs supplémentaires : par exemple $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus j\mathbb{R}$.
Attention à ne pas confondre supplémentaire et complémentaire : F^c n'est jamais un s.e.v. car $0 \notin F^c$.

5 Familles infinies

5.1 Combinaisons linéaires d'une famille (finie ou infinie)

Définition 25.33 (Famille presque nulle)

Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille de scalaires indexée par un ensemble I (fini ou infini).

- On appelle support des $(\lambda_i)_{i\in I}$ l'ensemble des indices $j \in I$ tels que $\lambda_j \neq 0$, càd l'ensemble

$$S = \left\{ j \in I \mid \lambda_j \neq 0 \right\}$$

- On dit que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est presque nulle si son support est fini.

On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles d'éléments de $\mathbb{K}$ presque nulles indexées par I.

Autrement dit, une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est presque nulle si elle ne possède qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

Remarque. Si I est fini, alors $\mathbb{K}^{(I)} = \mathbb{K}^I$.

Définition 25.34 (Combinaison linéaire (cas général))

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille (possiblement infinie) de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $u \in E$ est une combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ si

$$\exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

Si on note S le support de $(\lambda_i)_{i\in I}$, la somme ci-dessus a bien un sens car elle peut se réécrire

$$u = \sum_{i\in S} \lambda_i u_i + \sum_{i\in I\setminus S} \lambda_i u_i = \sum_{i\in S} \lambda_i u_i + 0_E$$

C'est donc une somme avec un nombre fini de termes qui a toujours un sens. Autrement dit, u est combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ si on peut choisir une sous-famille **finie** $(u_j)_{j\in S}$ de $(u_i)_{i\in I}$ et exprimer u comme une combinaison linéaire des $(u_j)_{j\in S}$.

Exemple 37. Tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille (infinie) de polynômes $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{llllll} P = & 1+ & X+\ldots+ & X^n & & \\ P = & 1+ & X+\ldots+ & X^n + & X^{n+1}+ & X^{n+2}+ \quad \ldots \end{array}$$

Ainsi, $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k X^k$ avec $\lambda_k := \begin{cases} a_k & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$ qui est bien une famille presque nulle.

5.2 S.e.v. engendré par une famille (finie ou infinie)

Définition 25.35 (S.e.v. engendré par une famille (cas général))

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille (possiblement infinie) de vecteurs de E, alors on note

$$\mathrm{Vect}(u_i)_{i\in I} := \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i u_i \;\middle|\; (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\} \qquad = \mathrm{Vect}\left(\{u_i \mid i \in I\}\right)$$

et on l'appelle le <u>sous-espace engendré par la famille $(u_i)_{i\in I}$</u>.

Comme dans le cas fini, $\mathrm{Vect}(u_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme une combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$.

Exemple 38. Dans l'e.v. $\mathbb{K}[X]$,

$$\mathrm{Vect}(X^{2k})_{k\in\mathbb{N}} =$$

5.3 Famille génératrice (finie ou infinie)

Définition 25.36 (Famille génératrice (cas général))

Soit $(g_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de vecteurs de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathrm{Vect}(g_i)_{i\in I} = E$
- **Tout** vecteur $u \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $(g_i)_{i\in I}$

Lorsque c'est le cas, on dit que $(g_i)_{i\in I}$ est une <u>famille génératrice (de E)</u>.

Propriété 25.37 (Caractérisation pour avoir une famille génératrice (cas général))

Une famille $(g_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si :

$$\forall u \in E \quad \exists (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i\in I} \lambda_i g_i$$

Exemple 39. Par l'exemple 37, dans l'e.v. $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$, puisque tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ peut s'écrire $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k X^k$ avec $(\lambda_k) \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Exemple 40. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors la famille $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$. En effet, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, si on pose $n = \deg P$, on a par la formule de Taylor

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k (X-\alpha)^k \qquad \text{avec} \quad \lambda_k := \begin{cases} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

La famille $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien presque nulle : P s'écrit donc comme une combinaison linéaire des $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

5.4 Famille libre (finie ou infinie)

Définition 25.38 (Famille libre (cas général))

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de vecteurs de E. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre si

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad \sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\forall i \in I \quad \lambda_i = 0)$$

Pour l'exemple qui suit, on rappelle que pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$, on note

$$\begin{aligned} 1_A : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } u \in A \\ 0 & \text{si } u \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 41. On se place sur le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Montrons que la famille $(1_{[0,k]})_{k\in\mathbb{N}}$ est libre. Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille presque nulle telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k 1_{[0,k]} = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$$

Montrons que chaque λ_k est nul.

5.5 Base (finie ou infinie)

Définition 25.39 (Base (cas général))

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de vecteurs de E. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une base (de E) si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice et libre.

Propriété 25.40

Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si

$$\forall u \in E \qquad \boxed{\exists!}(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Les scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ sont appelés les coordonnées de u dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Autrement dit, tout vecteur de E se décompose selon un nombre **fini** de vecteurs de la famille $(e_i)_{i\in I}$, et l'écriture de cette décomposition est unique.

Exemple 42. La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique.

Exemple 43. L'exemple 40 montre que la famille $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$. On peut montrer qu'elle est libre (exercice). C'est donc une base de $\mathbb{K}[X]$.

6 Compléments : algèbre (programme de MP uniquement)

Définition 25.41 (Non officiel : algèbre)

On dit que $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre si :

1. $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
2. $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau.
3. La loi $\times$ vérifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in \mathcal{A} \qquad \lambda \cdot (u \times v) = (\lambda \cdot u) \times v = u \times (\lambda \cdot v)$$

Si de plus $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau *commutatif*, on dira que $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre *commutative*.

La notion de $\mathbb{K}$-algèbre est en fait plus générale : la définition ci-dessus est celle d'une $\mathbb{K}$-algèbre unifère associative. On parlera cependant de "$\mathbb{K}$-algèbre" pour faire plus court. On verra dans un chapitre ultérieur que la troisième propriété (couplée à la distributivité) signifie que l'application suivante est bilinéaire :

$$\times : \begin{array}{l} \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A} \\ (u,v) \mapsto u \times v \end{array}$$

Exemple 44.

- $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^{\Omega}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$ sont toutes des $\mathbb{K}$-algèbres commutatives.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$ n'est pas une $\mathbb{K}$-algèbre car ce n'est pas un anneau.

7 Compléments bis : réécritures d'un s.e.v.

On a vu deux façons de définir un s.e.v. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, on peut écrire le s.e.v. suivant de deux façons :

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,-1)\right) \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\} \end{aligned}$$

La première est la forme "Vect" et la seconde la forme "équation" (ici F est un plan d'équation $x+y+z=0$). Les deux formes ont leur utilités :

- La forme Vect permet de justifier immédiatement que F est un s.e.v. et de lui trouver une famille génératrice (qui n'est pas forcément une base de F).
- La forme équation permet de vérifier facilement si un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$ est dans F ou non, et plus généralement d'exploiter l'information "$u \in F$" de manière simple.

C'est pourquoi il est intéressant et utile de passer d'une forme à l'autre. Pour simplifier, on se place sur $E=\mathbb{R}^n$. Le passage de "équation" à "Vect" est plus facile et a été vu en TD et en exemple. L'autre passage mérite une méthode explicative.

Méthode (Passer de "Vect" à "équation" dans $E=\mathbb{R}^n$)

On se place sur l'e.v. $E=\mathbb{R}^n$. Soit $F=\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$ qu'on veut mettre sous forme "équation".

- Tout d'abord, on écrit les vecteurs $u_1,\cdots,u_p \in \mathbb{R}^n$ en colonne, comme des éléments de $\mathbb{R}^n$ identifiés $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad u_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

- Étant donné $x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}$ qui serviront de paramètres, on écrit le système écrit sous forme de matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1p} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & x_n \end{array}\right)$$

  Comme vu en TD, on a $(x_1,\cdots,x_n) \in F$ ssi ce système admet (au moins) une solution (i.e. est compatible).

- On met la matrice du système sous forme échelonnée et on regarde uniquement les lignes remplies de zéro (à gauche de la barre) :

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & *_1 \\ 0 & \cdots & 0 & *_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}$$

  où $*_1, *_2, \cdots$ sont des expressions en fonction de $x_1,\cdots,x_n$. Pour que ce système soit compatible, il faut et il suffit que chacune de ces expressions soient nulles. Ainsi,

$$F = \{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid *_1 = *_2 = \ldots = 0\}$$

Important : si aucune ligne remplie de zéro n'apparait après échelonnement, il n'y a pas de condition à vérifier pour avoir $(x_1,\cdots,x_n) \in F$. Donc $F=\mathbb{R}^n$.